ANALIZA FUNKCJONALNA I TOPOLOGIA

Lista 8 - Operatory na przestrzeniach Hilberta

1. Niech $A, B \in B(\mathcal{H})$ będą samosprzeżone. Pokazać, że
   (a) AB jest samosprzężony wtedy i tylko wtedy gdy $AB = BA$,
   (b) $A + A^*$, AA^*, A^*A, $A + B$, ABA, BAB są samosprzężone
   (c) wskazać przykład gdy AB nie jest samosprzężony.
2. Niech $T \in B(\mathcal{H})$. Pokazać, że T jest operatorem normalnym wtedy i tylko wtedy gdy $\| T(x) \| = \| T^*(x) \|$ dla każdego $x \in \mathcal{H}$.
3. Pokazać, że operator $T \in B(\mathcal{H})$ jest unitarny wtedy i tylko wtedy gdy jest surjektywną izometrią.
4. Pokazać, że wartości własne ograniczonego operatora samosprzężonego są rzeczywiste.
5. Pokazać, że wartości własne operatora unitarnego leżą na okręgu jednostkowym.
6. Niech (e_n) będzie bazą ON w ośrodkowej zespolonej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Niech będzie dany operator $D : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ postaci

$$D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$$

   gdzie $x \in \mathcal{H}$, natomiast $\lambda = (\lambda_n)$ jest ciągiem liczb zespolonych z przestrzeni ℓ^∞.
   (a) Pokazać, że D jest ograniczony i ma normę $\| D \| = \| \lambda \|_\infty$.
   (b) Wyznaczyć D^* i pokazać, że D jest normalny.
   (c) Pokazać, że D jest samosprzężony wtedy i tylko wtedy gdy λ jest ciągiem rzeczywistym.
   (d) Pokazać zwartość operatora D gdy λ jest ciągiem zbieżnym do zera.
7. Pokazać, że jeżeli $T \in B(H)$, to $\| T \| = \| T^* \|$.
8. Pokazać, że $T \in B_{00}(H)$ wtedy i tylko wtedy gdy T jest postaci

$$T(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle g_j$$

   gdzie $\{e_1, \ldots, e_n\}$ oraz $\{g_1, \ldots, g_n\}$ są zbiorami wektorów.
9. Korzystając z zadania 7 i twierdzeń o operatorach zwartych na przestrzeni Hilberta H pokazać, że operator $T \in B(\mathcal{H})$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy gdy T^* jest zwarty.

10. Niech $\mathcal{H}$ będzie ośrodkową przestrzenią Hilberta. Operator $T \in B(H)$ nazywa się *operatorem Hilberta-Schmidta* jeżeli istnieje w $\mathcal{H}$ baza ortonormalna (e_n), taka że $\sum_{n=1}^{\infty} \| T(e_n) \|^2 < \infty$. Pokazać, że operator Hilberta-Schmidta jest zwarty, przybliżając go ciągiem operatorów skończonej rangi.

R. Lenczewski